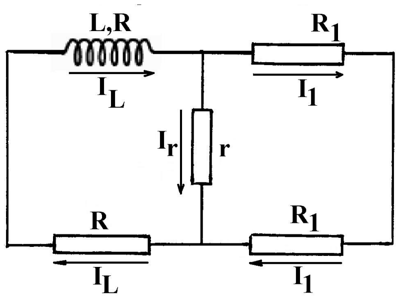
Problema 1 - Electromagnetism	**Parţial**	**Punctaj**
		10
A.		**3**
a) Înainte de deschiderea lui K, prin bobina cu inductanţa L circula curentul $I_{L_1} = E/(R+R_1)$, **(*). ……….0,25 p** Prin miliampermetru nu circula nici-un curent electric (nu există nici-o diferenţă de potenţial la capetele instrumentului). Admiţând ca pozitive sensurile din figură ale curenţilor electrici din ramuri,  după trecerea lui K pe poziţia deschis (adică in timpul regimului tranzitoriu), cu legile lui Kirchhoff putem scrie relaţiile $I_L = I_r + I_1$, $rI_r = 2R_1 I_1$, respectiv $L\frac{dI_L}{dt} + 2RI_L + rI_r = 0$. ……………………………**0,75 p** Din primele două relaţii găsim imediat că $I_L = I_r(r+2R_1)/(2R_1)$. A treia relaţie se poate transcrie sub forma $\frac{dI_L}{dt} = -\frac{rR+(r+2R)R_1}{LR_1} I_r$. Sarcina electrică ce trece în intervalul de timp dt prin miliampermetru se scrie sub forma $dq = I_r dt = -\frac{LR_1 dI_L}{rR+(r+2R)R_1}$. **……..0,75 p** Deoarece curentul I_L variază de la valoarea iniţială I_{L_1}, dată de relaţia (*), la valoarea finală $I_{L_2} = 0$, putem integra între aceste limite. Obţinem în final $q = \frac{EL}{2R(r+R)+(r+2R)R_1 + rR^2/R_1}$. ………………**0,5 p**		
b) Când numitorul este minim, sarcina ce trece prin miliampermetru este maximă. Aceasta se întâmplă atunci când $(r+2R)R_1 = \frac{rR^2}{R_1}$, rezultând $R_1 = R[r/(r+2R)]^{1/2}$,. **……………………………………0,5 p**		
c) Sarcina maximă este $q_{\max} = \frac{EL}{2R}\left[r+R+\sqrt{r(r+2R)}\right]^{-1}$**……..0,25 p**		
B.		**3**
Legea II Newton are forma $m\vec{a} = m\,d\vec{v}/dt = \vec{F} = q(\vec{v}\times\vec{B}) - \alpha\vec{v}$. Proiecţiile ecuaţiei de mişcare pe cele trei axe sunt $F_x = m\,dv_x/dt = -\alpha v_x + qBv_y$, $F_y = m\,dv_y/dt = -\alpha v_y - qBv_x$, respectiv $F_z = m\,dv_z/dt = -\alpha v_z = 0$. Particula se va mişca în planul *x0y* (deoarece $v_{z0} = 0$)……………………………………… **1 p**		

Ţinem cont că , prin definiţie, $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, unde $\vec{r}(x, y, 0)$ este raza vectoare din planul $x0y$ a particulei şi, după simplificarea cu dt în toţi numitorii obţinem

$mdv_x = -\alpha dx + qBdy$, respectiv

$mdv_y = -\alpha dy - qBdx$ **...0,75 p**

Toţi factorii de proporţionalitate din faţa diferenţialelor sunt constanţi şi, de aceea, putem să utilizăm aceste relaţii (în sens integral) între starea iniţială din origine, cu $\vec{r}_0(0,0,0)$ şi $\vec{v}_0(0, v_0, 0)$, şi starea finală, din punctul terminus al spiralei, cu $\vec{r}_P(x_P, y_P, 0)$ şi $\vec{v}_P(0,0,0)$. Avem

$m\Delta v_x = m(0-0) = 0 = -\alpha\Delta x + qB\Delta y = -\alpha(x_P - 0) + qB(y_P - 0)$, respectiv

$m\Delta v_y = m(0 - v_0) = -\alpha\Delta y - qB\Delta x = -\alpha(y_P - 0) - qB(x_P - 0)$, adică

$-\alpha x_P + qBy_P = 0, \qquad +\alpha y_P + qBx_P = mv_0$ **.................................0,75 p**

Rezolvând sistemul obţinem

$x_P = \dfrac{mqBv_0}{\alpha^2 + q^2B^2}$, respectiv $y_P = \dfrac{m\alpha v_0}{\alpha^2 + q^2B^2}$ **.........................0,5 p**

C. **3**

Putem scrie relaţiile evidente $(m/2)v_0^2 = eU$, $\quad v_0 = \sqrt{2eU/m}$. **......0,25 p**

Pe de altă parte, la mişcarea în câmp magnetic

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{v}\times\vec{B}) = -e\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix}.$$

De aici $\dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{e}{m}v_yB_z(x)$, $\dfrac{dv_y}{dt} = +\dfrac{e}{m}v_xB_z(x)$ şi $\dfrac{dv_z}{dt} = 0.$ (*)

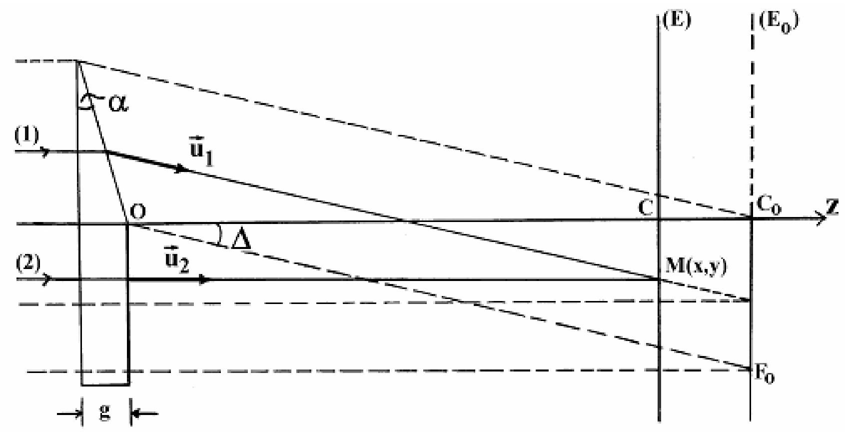
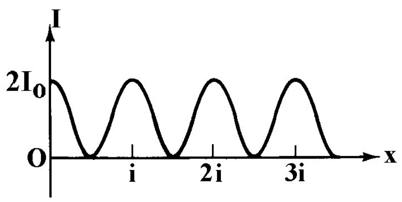
Valoarea constantă a lui v_z este egală cu zero (căci $v_{z0} = 0$). Electronul se va mişca în planul xOy**...0,75 p**

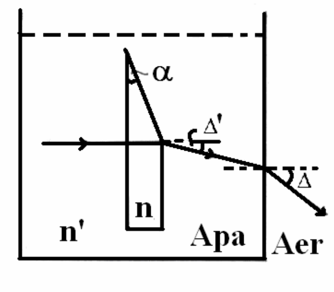
Deoarece $v_x = dx/dt$, a doua ecuaţie din setul (*) se poate scrie sub forma $dv_y = \dfrac{e}{m}B_z(x)dx$ care, prin integrare, ne dă imediat $v_y = \dfrac{e}{m}B_0\dfrac{d}{\pi}[1-\cos(\pi\dfrac{x}{d})] = \dfrac{2eB_0d}{\pi m}\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{2d}\right)$. Constanta de integrare s-a determinat ţinând cont că, la intrarea în câmpul magnetic, adică la $x = 0$, electronul avea componenta $v_{y0} = 0$ **........0,75 p**

Deoarece cîmpul magnetic nu poate modifica modulul vitezei avem mereu $|\vec{v}| = v_0$ şi putem scrie $v_x = \sqrt{v_0^2 - v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - \left(\dfrac{2eB_0d}{m\pi}\right)^2\sin^4\left(\dfrac{\pi x}{2d}\right)}$.

La ieşirea din câmp, când $x = d$, avem $v_x(x = d) = \sqrt{v_0^2 - \left(\dfrac{2eB_0d}{m\pi}\right)^2} \equiv v_{xd}$.

..0,75 p Acum mai putem scrie $\vec{v}_0 . \vec{v}_d = v_0 v_{xd} = v_0^2 \cos\alpha$ şi, de aici, $\cos\alpha = \frac{v_{xd}}{v_0} = \sqrt{1 - \left(\frac{2eB_0 d}{\pi m v_0}\right)^2}$, adică $\sin\alpha = \frac{2eB_0 d}{\pi m v_0} = \frac{B_0 d}{\pi}\sqrt{\frac{2e}{mU}}$**... 0,5 p**		
Oficiu		**1**

Problema 2 - Un dispozitiv interferenţial mai puţin cunoscut	Parţial	Punctaj
		10
a) La trecerea prin prismă, orice rază de lumină deviază spre bază cu unghiul $\Delta \approx (n-1)\alpha$ **.............................0,5 p** Considerăm razele (1) şi (2) care ajung în punctul M(x) de pe ecran-vezi prima figură. Pentru desen corect se acordă**.. 0,75 p**  Diferenţa lor de fază este $\varphi = (2\pi/\lambda)(\vec{u}_1 - \vec{u}_2).\vec{OM}$, în care $\vec{OM}(x, y, D)$, $\vec{u}_2(0,0,1)$ iar $u_{1x} = \sin\Delta \approx \Delta$, $u_{1y} = 0$, $u_{1z} = \cos\Delta \approx 1$.Astfel $\varphi = (2\pi/\lambda)x.\Delta = (2\pi/\lambda)(n-1)x\alpha$.**.....1 p** Rezultatul interferenţei din M se exprimă prin relaţia binecunoscută $I = 2I_0 \cos^2(\varphi/2) = 2I_0 \cos^2[(\pi/\lambda)(n-1)x\alpha]$, **(*)..................... 1 p** b) Franjele sunt paralele cu axa Oy (dirijată perpendicular pe planul desenului). Maximele corespund lui $\varphi = 2\pi s,\ s = 0,1,2,...$ Interfranja corespunde variaţiei lui φ cu 2π. Obţinem imediat $i = \lambda/[(n-1)\alpha] \approx 137{,}5\mu m$.**........0,5 p** Acum putem scrie dependenţa $I(x) = 2I_0 \cos^2(\pi x/i)$ **................0,5 p** Reprezentarea grafică solicitată este cea din figură. **....................................0,5 p**  		
c) Cu ecranul în poziţia (E$_0$) zona de interferenţă se lărgeşte maximal (desen nou, sau prezentarea situației noi pe vechiul desen) **……………………..0,5 p**		

De pe desen rezultă: $tg\Delta = h/(g + D_0)$, unde g este grosimea lamei. Deoarece $g <<< D_0$ putem scrie aproximativ $D_0 \approx h/\Delta \approx h/[(n-1)\alpha] \approx 2{,}75m$........ **0,75 p** Numărul de franje ce încap în zona de interferenţă este $N = (C_0F_0)/i \approx h/i \approx h(n-1)(\alpha/\lambda) \approx 82{,}7$; $[N] = 82$ **.......0,5 p**		
d) În apă, pentru deviaţia dată de prismă avem formula $\Delta' \approx (n/n'-1)\alpha$. **..0,5 p**  Rolul lui Δ din formulele de mai sus (punctele a – c) îl joacă acum un alt Δ, anume cel ce satisface legea refracţiei de la ieşirea din vas (vezi a treia figură): $1.\sin\Delta = n'\sin\Delta'$. Aproximând sinuşii prin unghiurile corespunzătoare (în radiani) avem $\Delta \approx n'\Delta' \approx (n-n')\alpha$ **..............................0,75 p** Acum, formula (*), dedusă la punctul a, capătă o formă uşor modificată, anume $I(x) = 2I_0\cos^2[(\pi/\lambda)\Delta' x n'] = 2I_0\cos^2[(\pi/\lambda)x(n-n')\alpha]$ **.............0,75 p** Pentru noua interfranjă obţinem $i' = \lambda/[(n-n')\alpha] = 412{,}5\mu m$.**........0,5 p**		
Oficiu		**1**

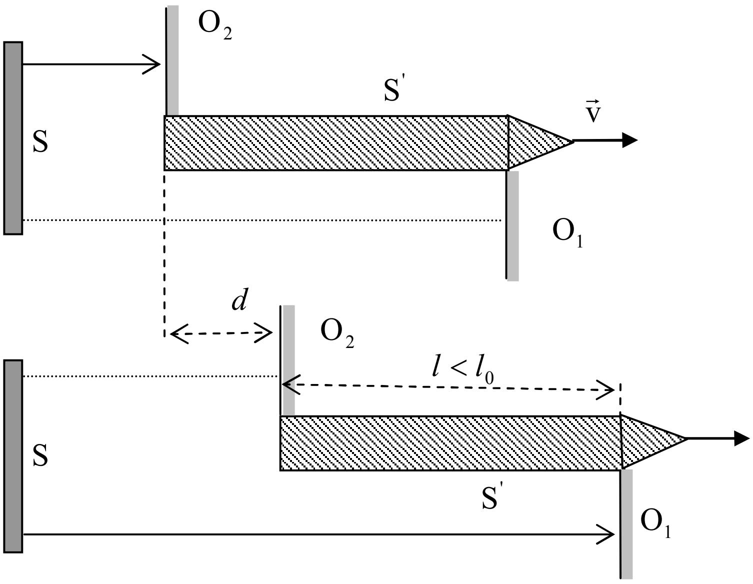
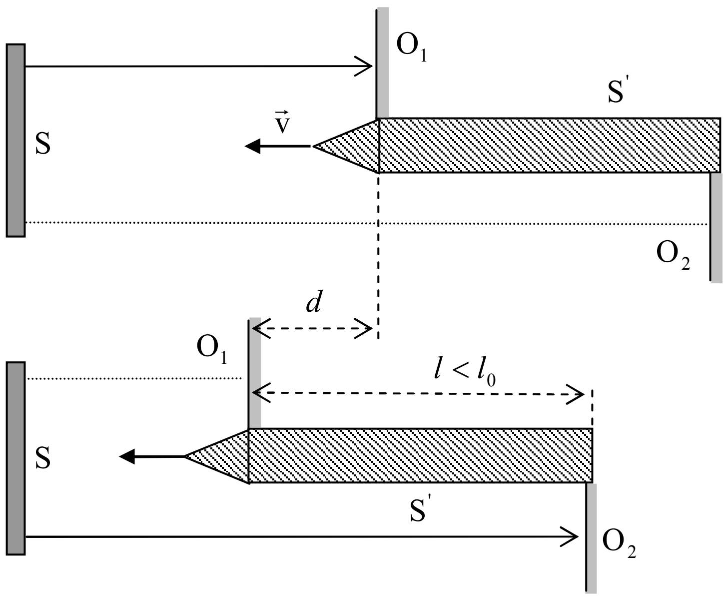
<table>
<tr><th>Problema 3 – Navă cosmică interstelară</th><th>Parţial</th><th>Punctaj</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td>a) Metoda 1
În figura 1 sunt reprezentate poziţiile navei cosmice (S') în raport cu sistemul fix (S), în momentele corespunzătoare reflexiilor de pe fiecare din cele două oglinzi.


Fig. 1</td><td>0,50</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Durata pauzei (Δt) dintre cele două semnale recepţionate în sistemul fix S este egală cu durata parcurgerii de către lumină a distanţei ($d + l$), dus – întors, unde d – distanţa parcursă de nava cosmică, în raport cu corpul ceresc, în timp ce lumina străbate într-un singur sens distanţa dintre oglinzi, iar l – distanţa dintre oglinzi în raport cu S.</td><td>0,25</td><td></td></tr>
<tr><td>Fie $\Delta t_1'$ durata propagării luminii din planul oglinzii O_2 până pe oglinda O_1, măsurată de S':
$$\Delta t_1' = \frac{l_0}{c}.$$</td><td>0,25</td><td></td></tr>
<tr><td>Durata aceluiaşi eveniment, măsurată de S, este:
$$\Delta t_1 = \frac{\Delta t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c};$$
$$\Delta t_1 = \frac{l_0}{c\sqrt{1-\beta^2}}.$$</td><td>0,25</td><td></td></tr>
<tr><td>Rezultă:
$$d = v \cdot \Delta t_1 = \frac{\beta l_0}{\sqrt{1-\beta^2}}; \; l = l_0\sqrt{1-\beta^2};$$</td><td>0,25</td><td></td></tr>
</table>

$$\Delta t=\frac{2(d+l)}{c}=\frac{2}{c}\left[\frac{\beta l_0}{\sqrt{1-\beta^2}}+l_0\sqrt{1-\beta^2}\right];$$ $$\Delta t=\frac{2l_0}{c}\frac{1+\beta-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}};\ \beta^2<<\beta;$$ $$\Delta t\approx\frac{2l_0}{c}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}};$$ $$\mathrm{v}=c\frac{(\Delta t)^2c^2-4l_0^2}{(\Delta t)^2c^2+4l_0^2}.$$	**0,75** **0,75**	
a) Metoda 2 Durata pauzei (Δt) dintre cele două semnale recepţionate în sistemul fix S este: $\Delta t=\Delta t_1+\Delta t_2$, unde Δt_1 – durata propagării luminii, dus – întors, între planele celor două oglinzi (în raport cu S), iar Δt_2 – durata parcurgerii de către lumină, în sens invers, a distanţei d pe care nava cosmică a parcurs-o faţă de S în timpul Δt_1. Dacă $\Delta t'$ – durata parcurgerii distanţei dintre planele oglinzilor, dus – întors, de către lumină, în raport cu S', rezultă: $$\Delta t'=\frac{2l_0}{c};\qquad \Delta t_1=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}};$$ $$d=\mathrm{v}\cdot\Delta t_1=c\cdot\Delta t_2;$$ $$\Delta t=\Delta t_1+\frac{\mathrm{v}}{c}\Delta t_1=(1+\beta)\Delta t_1;$$ $$\Delta t=\frac{2l_0}{c}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}};$$ $$\mathrm{v}=c\frac{(\Delta t)^2c^2-4l_0^2}{(\Delta t)^2c^2+4l_0^2}.$$	**0,75** **0,25** **0,25** **0,50** **0,50** **0,75**	**3**
b) Pentru semnalul electromagnetic incident, sursa de oscilaţii este fixă (sistemul S), iar observatorul (nava cosmică S') se depărtează de sursă. Frecvenţa semnalului înregistrat pe nava cosmică este: $$\nu'=\nu_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$ Pentru semnalul electromagnetic reflectat, observatorul (sistemul S) este fix, iar sursa de oscilaţii (racheta S') se depărtează de observator. Frecvenţa semnalului înregistrat pe staţia de pe Σ este: $$\nu=\nu'\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$ Rezultă: $$\nu=\nu_0\frac{1-\beta}{1+\beta}.$$	**1,25** **1,25** **0,50**	**3**

c) Metoda 1 **3**

În figura 2 sunt reprezentate poziţiile navei cosmice (S') în raport cu sistemul fix (S), în momentele diferite, corespunzătoare reflexiilor de pe fiecare din cele două oglinzi.



0,50

Fig. 2

Durata pauzei $(\Delta\tau)$ dintre cele două semnale recepţionate în sistemul fix S este egală cu durata parcurgerii de către lumină a distanţei $(l-d)$, dus – întors, unde d – distanţa parcursă de nava cosmică, în raport cu corpul ceresc, în timp ce lumina străbate într-un singur sens distanţa dintre oglinzi, iar l – distanţa dintre oglinzi în raport cu S.

0,25

Fie $\Delta t_1'$ durata propagării luminii din planul oglinzii O_1 până pe oglinda O_2, măsurată de S':

$$\Delta t_1' = \frac{l_0}{c}.$$

0,25

Durata aceluiaşi eveniment, măsurată de S, este:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c};$$

$$\Delta t_1 = \frac{l_0}{c\sqrt{1-\beta^2}}.$$

0,25

Rezultă:

$$d = v \cdot \Delta t_1 = \frac{\beta l_0}{\sqrt{1-\beta^2}}; \; l = l_0\sqrt{1-\beta^2};$$

0,25

$$\Delta\tau = \frac{2(l-d)}{c} = \frac{2}{c}\left[l_0\sqrt{1-\beta^2} - \frac{\beta l_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right];$$ $$\Delta\tau = \frac{2l_0}{c}\frac{1-\beta-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}};\ \beta^2 \ll \beta;$$ $$\Delta\tau \approx \frac{2l_0}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}};$$ $$\mathrm{v} = c\frac{(\Delta t)^2c^2 - 4l_0^2}{(\Delta t)^2c^2 + 4l_0^2};$$ $$\Delta\tau = \frac{4l_0^2}{c^2\Delta t}.$$	**0,75** **0,75**	
c) Metoda 2 Durata pauzei $(\Delta\tau)$ dintre cele două semnale recepţionate în sistemul fix S este: $\Delta\tau = \Delta\tau_1 - \Delta\tau_2$, unde $\Delta\tau_1 -$ durata propagării luminii, dus – întors, între planele celor două oglinzi (în raport cu S), iar $\Delta\tau_2 -$ durata parcurgerii de către lumină, în sens invers, a distanţei *d* pe care nava cosmică a parcurs-o faţă de S în timpul $\Delta\tau_1$. Dacă $\Delta t'$ – durata parcurgerii distanţei dintre planele oglinzilor, dus – întors, de către lumină, în raport cu S', rezultă: $$\Delta t' = \frac{2l_0}{c};\quad \Delta\tau_1 = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}};$$ $$\Delta\tau_1 = \frac{2l_0}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}};$$ $$d = \mathrm{v}\cdot\Delta\tau_1 = c\cdot\Delta\tau_2;$$ $$\Delta\tau = \Delta\tau_1 - \frac{\mathrm{v}}{c}\Delta\tau_1 = (1-\beta)\Delta\tau_1;$$ $$\Delta\tau = \frac{2l_0}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}};$$ $$\mathrm{v} = c\frac{(\Delta t)^2c^2 - 4l_0^2}{(\Delta t)^2c^2 + 4l_0^2};\quad \beta = \frac{\mathrm{v}}{c} = \frac{(\Delta t)^2c^2 - 4l_0^2}{(\Delta t)^2c^2 + 4l_0^2};$$ $$\Delta\tau = \frac{4l_0^2}{c^2\Delta t}.$$	**0,75** **0,25** **0,25** **0,25** **0,25** **0,50** **0,75**	**3**
Oficiu		**1**